Corso di laurea in Fisica, a.a. 2020/21, Analisi - 06 luglio 2021
(N. Ansini - G. Galise - C. Pinzari - M. Ponsiglione)

Nome: *Cognome:* Orale: 9 luglio ☐ 15 luglio ☐

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-4: risposta giusta = 1, risposta omessa = 0, risposta sbagliata =-0.5. Esercizo 5: punti 0-9. Esercizo 6: punti 0-7.

Esercizio 1 Per ogni $n \geq 1$ naturale, siano $a_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$, $b_n > 0$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente [V] [F]
2. Se $b_n \leq \sqrt{n}$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = +\infty$ [V] [F]
3. Esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ [V] [F]
4. $\lim_{n\to+\infty} a_n \cos(b_n) = 0$ [V] [F]

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f(x) = \sin(x^2)$

1. $f^{(5)}(0) > 0$ [V] [F]
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 2(1 - \cos(x))}{x^3} < 0$ [V] [F]
3. $f(x)$ è una funzione periodica [V] [F]
4. $|f(x)| \leq |x|$ per ogni $|x| \leq 1$ [V] [F]

Esercizio 3 Sia $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ tale che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$
e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

1. Se f è crescente allora $F(1) \geq 2$ [V] [F]
2. $F(x)$ è discontinua in $x = 0$ [V] [F]
3. Se $\lim_{x\to+\infty} |f(x)|\, x^2 = 1$ allora $\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ [V] [F]
4. F è derivabile nel punto $x_0 = -\sqrt{2}$ [V] [F]

Esercizio 4 Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = ay(t) + b$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono un parametri

1. Se $b = 0$ allora $y(t) = ae^{at}$ è soluzione [V] [F]
2. Se $a = 0$ e $b = 1$ allora esiste almeno una soluzione dispari [V] [F]
3. Se $a \neq 0$ l'integrale generale dell'equazione è $y(t) = e^{at} - \dfrac{b}{a} + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ [V] [F]
4. Se $a = b = 2$ la soluzione dell'equazione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$ è $y(t) = 2e^t - 1$ [V] [F]

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

1. determinare il dominio di f e studiarne il segno;
2. studiare gli asintoti, continuità e derivabilità;
3. studiare punti di max, min e flessi evidenziando gli eventuali intervalli in cui la funzione f è convessa;
4. disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 6 Data l'equazione differenziale

$$y'' + 9y = \cos(3t)$$

(a) determinarne l'integrale generale

(b) risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.